CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA”- EDIȚIA a XIX-a

BĂILEȘTI, 16 MARTIE 2024

CLASA a VIII-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1. Fie numărul $n = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{1}{1+2+3+\ldots+2021}$. Cel mai mic număr raţional pozitiv *a* astfel încât *n+a* să fie natural, este:

a) $\frac{1}{1011}$; b) $\frac{1}{2022}$; c) $\frac{1}{1010}$; d) $\frac{1}{2023}$

2. Dacă numerele reale *a* și *b* verifică condițiile $a \in [-1; 9]$, $a - 5b + 1 = 0$, atunci suma:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + 2a + 1} + \sqrt{a^2 + b^2 - 18a - 4b + 85}$$ este egală cu:

a) 1 ; b) $2\sqrt{5}$; c) $\sqrt{13}$; d) $2\sqrt{26}$.

3. Un oraș are 987 654 de case. Care este numărul minim de cifre pe care le pot avea numerele de telefon dacă fiecare casă are un telefon și niciun număr de telefon nu începe cu 0 ?

a) $9 \cdot 10^5$; **b) 7;** c) 9^7; d) 6.

4. Se consideră piramida triunghiulară regulată $VABC$ în care $AB = 4$ cm, iar $m(\sphericalangle AVB) = 90^o$.
Dacă punctele M și N sunt mijloacele segmentelor $[AV]$, respectiv $[BC]$, atunci măsura unghiului determinat de planele (AMN) și (VBC) este egală cu:

a) 30^o; b) 45^o ; c) 60^o d) 90^o.

5. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia egală cu 12 cm. Punctele M, N și P sunt mijloacele muchiilor $A'D'$, $A'B'$ și respectiv CD. Cosinusul unghiului dintre planele (MNP) și (ABC) este egal cu:

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$; **c)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$; d) $\frac{5}{6}$.

Probleme propuse de prof. Daniela Beldea , Băilești

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 notează pe lucrare rezolvările complete

Problema 1 (15 puncte)

Arati că oricare ar fi numerele reale strict pozitive *x, y, z* are loc inegalitatea :

$$\frac{x}{5x + 8y + 8z} + \frac{y}{5y + 8z + 8x} + \frac{z}{5z + 8x + 8y} \geq \frac{1}{7} .$$

Prof. Leonard Gabriel Tica, Craiova

Problema 2 (25 puncte)

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub, punctele O și O’ centrele fețelor ABCD, respectiv $A'B'C'D'$. Considerăm punctele $P \in (AD')$ și $Q \in (B'C)$ și notăm cu M mijlocul segmentului PQ. Demonstrați că $PQ \parallel (ABC)$ dacă și numai dacă $M \in (OO')$.

Prof. Traian Preda, GM 10/2023

Timp de lucru: 2 ore și 30 min
Din oficiu se acordă : 10 puncte

BAREM - Clasa a VIII-a

Partea I (5 x 10 p.)

1. a); 2. d); 3. b); 4. d); 5.a)

Partea a II-a

Problema 1

Dacă amplificăm prima fracție cu *x*, a doua fracție cu *y* și a treia fracție cu *z* obținem inegalitatea echivalentă:

$\frac{x^2}{5x^2+8xy+8xz}+\frac{y^2}{5y^2+8yz+8xy}+\frac{z^2}{5z^2+8xz+8yz}\geq\frac{1}{7}$ ……..……..……..5p

Din inegalitatea C-B-S (*varianta Titu Andreescu*) rezultă

$\frac{x^2}{5x^2+8xy+8xz}+\frac{y^2}{5y^2+8yz+8xy}+\frac{z^2}{5z^2+8xz+8yz}\geq\frac{(x+y+z)^2}{5(x^2+y^2+z^2)+16(xy+yz+zx)}$ ……5p

$\frac{(x+y+z)^2}{5(x^2+y^2+z^2)+16(xy+yz+zx)}\geq\frac{1}{7}$ este echivalentă cu $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ (adevărată)……....5p

Problema 2

PP′, QQ′ și MM′ perpendicular pe (ABC) , M mijlocul lui (PQ) → M′mijlocul P′Q′ ……2p
$PQII(ABC)$, iar P′Q′ este proiecția lui PQ pe (ABC) → PQQ′P′ este dreptunghi……..……3p

QQ′$IIBB'$ şi PP'IIDD′

$\left.\begin{matrix}\frac{PP'}{DD'}=\frac{AP'}{AD}\\ \frac{QQ'}{BB'}=\frac{CQ'}{CB}\end{matrix}\right\}\rightarrow\frac{CQ'}{CB}=\frac{AP'}{AD}\rightarrow AP'=CQ'$……..3P

Dar $AP'IICQ'$
Atunci $AP'CQ'$este parallelogram……..2p
M′ = O, MO și OO′ perpendicular pe (ABC) → M aparține lui OO′ ……..……..1p
Reciproc:
M aparține lui OO′ și OO′ este perpendicular pe (ABC) → MO perpendicular pe (ABC)
M mijlocul lui (PQ)……..…….…….2p
O mijlocul P′Q′, O mijlocul AC → CQ′AP′ paralelogram ……..……....……..1p
$\frac{CQ'}{CB}=\frac{AP'}{AD}$
$\frac{PP'}{DD'}=\frac{QQ'}{BB'}\rightarrow PP'=QQ'$……..……..…….3p
Dar PP'IIQQ′
PP'IIDD′→ QQ′P′P dreptunghi……2p
Finalizare……1p

NOTĂ: Orice altă modalitate corectă de rezolvare se acceptă şi se punctează corespunzător.